Πραγματική Ανάλυση

Ορισμός

$S \subseteq C(X)$. S ισοσυνεχές στο $x \in X$, αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r > 0$, τ.ω

$\forall y \in B_r(x)$, $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. S ισοσυνεχές, αν S ισοσυνεχές στο x $\forall x \in X$

Θεώρημα (Arzela-Ascoli)

Έστω (X, d) συμπαγής κ. $S \subseteq C(X)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) S συμπαγές

ii) S κλειστό, φραγμένο κ. ισοσυνεχές

Αποδ.

i) ⟹ ii) Το δείξαμε στην προηγούμενη διάλεξη

ii) ⟹ i)

Έστω $\{f_n\} \subseteq S$. Αρκεί νδο $\exists$ υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ που να συγκλίνει (ομοιόμορφα)

Ισχυρισμός

$\exists M > 0$, τ.ω $\forall x \in X$, $\forall f \in S$, $|f(x)| \leq M$

Για $n \in \mathbb{N}$, για $x \in X$, $\exists r_{n,x} > 0$, τ.ω $\forall y \in B(x, r_{n,x})$, $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$

Για $n \in \mathbb{N}$. $\{B(x, r_{n,x}) : x \in X\}$ ανοιχτή κάλυψη του X $\xrightarrow{\text{Συμπάγεια}}$

$\exists x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n \in X$, τ.ω $X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^n, r_{n,x_i^n})$. Θέτουμε ~~$r_{n,i} = r_{n,x_i^n}$~~

$r_{n,i} = r_{n,x_i^n}$

Άρα, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \exists i \in \{1, \dots, n_k\}$, τω $\forall y \in B(x_i^k, r_{n_k}), |f_n(x) - f_n(y)| < 1/k \ \forall f \in S$

$F := \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_i^k : i = 1, \dots, n_k\}$, το πολύ αριθμήσιμο.

- Πρόταση

Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων. Έστω $F = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq X$ (F το πολύ αριθμήσιμο). Τότε $\exists$ υπακολουθία $\{h_n\}$ της $\{f_n\}$ τω $h_n(x_i)$ να συγκλίνει $\forall i \in \mathbb{N}$.

Από Πρόταση, $\exists \{h_n\}$ υπακολουθία της $\{f_n\}$, τω $h_n(z)$ συγκλίνει, $\forall z \in F$.

Θδο $\{h_n\}$ είναι Cauchy (με την ομοιόμορφη μετρική)

Έστω $k \in \mathbb{N}$. $h_n(x_i^k) \xrightarrow{n \to +\infty}$ κάπου $\Rightarrow \{h_n(x_i^k)\}$ Cauchy, $\forall i \in \{1, \dots, n_k\} \Rightarrow$

$\forall i \in \{1, \dots, n_k\}, \exists n_0^i \in \mathbb{N}$, τω $\forall m, n \geq n_0^i, |h_m(x_i^k) - h_n(x_i^k)| < \frac{1}{k}$. Θέτουμε

$n_0 = \max\{n_0^1, \dots, n_0^{n_k}\} \Rightarrow \forall m, n \geq n_0, |h_m(x_i^k) - h_n(x_i^k)| < 1/k, \forall i \in \{1, \dots, n_k\}$

Έστω $x \in X \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n_k\}$, τω $\left.\begin{array}{l} |h_n(x_i^k) - h_n(x)| < 1/k \\ |h_m(x_i^k) - h_m(x)| < 1/k \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\forall m, n \geq n_0 \ |h_n(x) - h_m(x)| \leq \cancel{\dots} \ |h_n(x_i^k) - h_n(x)| + |h_n(x_i^k) - h_m(x_i^k)| +$
$|h_m(x_i^k) - h_m(x)| < \frac{3}{k}$.

$\exists M > 0$, τω $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq M \Rightarrow \exists \{g_n^1\}$ υπακολουθία της $\{f_n\}$, τω $g_n^1(x_1)$ συγκλίνει

$\{g_n^1(x_2)\}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\{g_n^2\}$ της $\{g_n^1\}$, τω $g_n^2(x_2)$ συγκλίνει

~~Εργαζο~~

Εργαζόμαστε ομοίως μέχρι ... $g_n^n(x_n)$ συγκλίνει ...

Άρα $\exists$ υπακολουθίες $\{g_n^i\}$, $i=1,2,\dots$ ώστε

1) $\{g_n^1\}$ υπακολουθία της $\{f_n\}$

2) $\{g_n^{i+1}\}$ — $\shortparallel$ — $\{g_n^i\}$, $\forall i \in \mathbb{N}$

3) $g_n^i(x_i)$ συγκλίνει $\forall i \in \mathbb{N}$

Η $\{h_n\} := \{g_n^n\}$ είναι υπακολουθία της $\{f_n\}$

ΘΔΟ $h_n(x_i)$ συγκλίνει, $\forall i$

$\{g_n^n\}$ υπακολουθία της $\{g_n^1\} \Rightarrow g_n^n(x_1) \to \lim g_n^1(x_1)$

$\{g_n^n\}$ — $\shortparallel$ — "από κάποιο n και μετά" της $\{g_n^2\} \Rightarrow g_n^n(x_2) \to \lim g_n^2(x_2)$

"για $n \geq 2$"

⋮

$\{g_n^n\}$ — $\shortparallel$ — "για $n \geq n$" της $\{g_n^n\} \Rightarrow g_n^n(x_n) \to \lim g_n^n(x_n)$ ∎

<u>Πόρισμα</u>

Έστω $S \subseteq C(X)$ φραγμένο κ ισοσυνεχές, (X,d) συμπαγής $\Rightarrow \bar{S}$ (ως προς την ομοιόμορφη ~~μετρική~~) συμπαγές σύνολο.

<u>Απόδ</u>

S φραγμένο $\Rightarrow \exists M > 0$, ώστε $\forall f,g \in S$, $D(f,g) \leq M$

Έστω $h \in \bar{S} \Rightarrow \exists \{f_n\} \subseteq S$, ώστε $f_n \xrightarrow{D} h$

Έστω $g \in S \Rightarrow D(h,g) \leq D(h,f_n) + D(f_n,g) \leq D(h,f_n) + M \to M \Rightarrow$

$D(h,g) \leq M$

Έστω $h \in \bar{S} \Rightarrow D(h, H) \leq D(h, g) + D(H, g) \leq M + M = 2M$.

Απο <u>Arzela-Ascoli</u> Αρκεί τώρα νδο $\bar{S}$ ισοσυνεχές

Έστω $\epsilon > 0$. S ισοσυνεχές: Για $x \in X$, $\exists\, r_x > 0$, τω $\forall y \in B_{r_x}(x)$,
$|f(x) - f(y)| < \epsilon/3 \ \forall f \in S$

Έστω $g \in \bar{S}$. Τότε, $\exists\, f \in S$, τω $D(f, g) < \epsilon/3$ Άρα $|g(x) - g(y)| \leq$

$|g(x) - g(y) + f(x) - f(x) + f(y) - f(y)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| <$

$D(f, g) + \epsilon/3 + D(f, g) < 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$, $\forall y \in B_{r_x}(x)$. ∎

<u>Πόρισμα</u>
Έστω $\{f_n\} \subseteq C(X)$, (X, d) συμπαγής μ.χ $\{f_n\}$ φραγμένη κ ισοσυνεχής.

Τότε η $\{f_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα (σε μια συνεχή συνάρτηση).

<u>Άσκηση 2</u>

$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. f_n φραγμένες ($f_n : X \to \mathbb{R}$). f φραγμένη;

<u>Λύση</u>

$\forall n\ \exists\, M_n > 0$, τω $\forall x \in X\ |f_n(x)| \leq M_n$

Για $\epsilon = 1$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < 1 \Rightarrow$ ~~$\forall n$~~

$\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$. $1 - f_n(x) < f(x) < 1 + f_n(x) \Rightarrow \underset{1 - M_{n_0}}{1 - f_{n_0}(x)} < f(x) < 1 + f_{n_0}(x) < 1 + M_{n_0}$

Άσκηση 4

ΝΔΟ $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ συγκλίνει ομ. στην $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ Αλλά
$f_n^2 \xrightarrow{\text{ομ}} f^2$

Λύση

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$. Έστω $\epsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τω $\frac{1}{n_0} < \epsilon \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| =$
$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \epsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$

$f_n^2(x) = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$ Παίρνουμε $x_n = n$: $|g_n(x_n) - g(x_n)| = |x_n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - x_n^2|$
≥ 2
$g(x) = x^2$

Άσκηση 3

$f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, $g_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$, $\{f_n\}, \{g_n\}$ ομοιόμορφα φραγμένες,
ΝΔΟ $f_n \cdot g_n \to f g$

Απόδ

Έστω $\epsilon > 0$ $\exists n_0$, τω $\forall n \geq n_0, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon / 2M_1$
$\exists n_0'$, τω $\forall n \geq n_0' \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| < \epsilon / 2M_2$

$\exists M_1$, τω $\forall x \in X$ $|f_n(x)| \le M_1$, $\exists M_2$, τω $\forall x \in X |g_n(x)| \le M_2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$|f_n \cdot g_n - f g| \le |f_n g_n - f g + f_n \cdot g - f_n \cdot g| \le |f_n g_n - f_n g| + |f_n g - f g| =$
$|f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| < M_1 \cdot \frac{\epsilon}{2M_1} + M_2 \cdot \frac{\epsilon}{2M_2} = \epsilon$ $\forall n \geq \max\{n_0, n_0'\}$

Άσκηση 5

(X,d) συμπαγής, $\{f_n\}$, $f_n \to f$, f συνεχής, $\forall \{x_n\}$ συγκλίνουσα $f_n(x_n) \to f(\lim x_n)$. Ν.δ.ο $f_n \xrightarrow{ομ} f$

Λύση

Έστω ότι $f_n \not\xrightarrow{ομ} f \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0,\ \exists \{x_n\} \subseteq X,\ \exists \{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ τω $\forall$ $n \in \mathbb{N}$: $|f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$.

$\exists \{x_{l_n}\}$ υπακ. της $\{x_n\}$ κ' $x_0 \in X$, τω $x_{l_n} \to x_0$

$\Rightarrow |f_{k_{l_n}}(x_{l_n}) - f(x_{l_n})| \geq \varepsilon,\ \forall n.$

Από υπόθεση: $|f_{k_{l_n}}(x_{l_n}) - f(x_0)| \to 0 \Rightarrow |f_{k_{l_n}}(x_{l_n}) - f(x_{l_n})| \leq |f_{k_{l_n}}(x_{l_n}) - f(x_0)| + |f(x_{l_n}) - f(x_0)|$